T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 11

Wrocław, 22 maja 2010

ZADANIE 1. Udowodnij, że zbiór Cantora jest *jednorodny*, tzn., że dla dowolnych punktów $x_0, y_0 \in \mathfrak{C}$ istnieje auto-homeomorfizm $h : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ taki, że $h(x_0) = y_0$.
Wskazówka: Przedstaw $\mathfrak{C}$ jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i sprytnie zdefiniuj dodawanie i odejmowanie w $\mathfrak{C}$ (najpierw trzeba określić dodawanie i odejmowanie w $\{0,1\}$). Określ h jako $h(x) = x - x_0 + y_0$. Oczywiście na końcu trzeba sprawdzić, że to jest homeomorfizm.

Definicja: *Kostką Hilberta* nazywamy przeliczalny produkt odcinków domkniętych: $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ z metryką „z szeregiem uzbieżniającym”, czyli z topologią zbieżności po współrzędnych.

ZADANIE 2. Udowodnij, że kostka Hilberta jest zbiorem zwartym.

ZADANIE 3. Udowodnij, że każda przestrzeń metryczna zwarta X jest homeomorficzna z podzbiorem kostki Hilberta.
Wskazówka: Przestrzeń X jest ograniczona, więc mnożąc metrykę przez stałą można założyć, że średnica X nie przekracza jedynki. Przestrzeń X jako zwarta jest ośrodkowa. Ustal ośrodek (q_n) w X i rozważ ciąg funkcji $f_n : X \to [0,1]$ zadanych wzorem $f_n(x) = d(x, q_n)$.

ZADANIE 4. Wykaż równoważności wersji twierdzenia Baire'a podane na wykładzie.

Tomasz Downarowicz